学术论文

多复变广义解析函数的一个非线性边值问题*

杨贺菊[1] 黄 沙[2] 乔玉英[2]**

1. 河北科技大学数学系，石家庄 050018；2. 河北师范大学，石家庄 050016

摘要 研究多复变广义解析函数的一个非线性边值问题，讨论多复变中的Hadamard估计和解的积分表示式，研究几个奇异积分算子，并用Schauder不动点原理证明了解的存在性.

关键词 多复变广义解析函数 非线性边值问题

设 D_k 是复平面 C 上的单位圆盘，记 C^2 空间中双圆柱域 $D=D_1\times D_2$，D_1，D_2 的边界分别为 L_1：$|z_1|=1$，L_2：$|z_2|=1$，记 $L=L_1\times L_2$，用 D_k^+，D_k^- 表示 $D_k(k=1, 2)$的内部和外部. 设 $t=(t_1, t_2)\in L$，当点 $z=(z_1, z_2)$从 $D_1^{\pm}\times D_2^{\pm}$ 趋于 t 时，记函数 $\Phi(z)=\Phi(z_1, z_2)$相应极限值为 $\Phi^{\pm,\pm}(t_1, t_2)$.

引理1[1] 设 $\phi(t)$在 L 上连续，则 Cauchy 型积分

$$\Phi(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\prod i)^2}\int_L\frac{\phi(t)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2}{(t_1-z_1)(t_2-z_2)}, \tag{1}$$

$(z_k\notin L_k)$，是解析函数，且 $\Phi(z_1, \infty)=\Phi(\infty, z_2)=\Phi(\infty, \infty)=0$.

若对任意两点 t，$\tau\in L$，有 $|\phi(t)-\phi(\tau)|\leqslant J_1|t-\tau|^{\alpha}$，其中 $|t-\tau|=(\sum_{k=1}^{2}|t_k-\tau_k|^2)^{\frac{1}{2}}$，$0<\alpha<1$，$J_1$ 为正常数，称 $\phi(t)=\phi(t_1, t_2)$在其特征流形 L 上满足 Hölder 条件，并记作 $\phi(t)\in \mathbb{H}(L, \alpha)$. 定义 $\|\phi\|_{\alpha}=C(\phi, L)+\mathbb{H}(\phi, L, \alpha,)$. 则

$$\begin{aligned}&\|\phi_1+\phi_2\|_{\alpha}\leqslant\|\phi_1\|_{\alpha}+\|\phi_2\|_{\alpha},\\&\|\phi_1\phi_2\|_{\alpha}\leqslant J_2\|\phi_1\|_{\alpha}\|\phi_2\|_{\alpha},\end{aligned}\tag{2}$$

其中 J_2 为正常数，ϕ_1，$\phi_2\in\mathbb{H}(L, \alpha)$.

引进积分算子[2]

$$S_1\phi=\frac{2}{\prod i}\int_{L_1}\frac{\phi(\tau_1,t_2)}{\tau_1-t_1}\mathrm{d}\tau_1,$$

$$S_2\phi=\frac{2}{\prod i}\int_{L_2}\frac{\phi(t_1,\tau_2)}{\tau_2-t_2}\mathrm{d}\tau_2,$$

$$S_3\phi=\frac{2}{(\prod i)^2}\int_{L}\frac{\phi(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,$$

$$t_1\in L_1, t_2\in L_2.$$

引理2[2] 若(1)式中 $\phi(t)\in\mathbb{H}(L, \alpha)$，则 $\Phi(z_1, z_2)$解析，且对于$(t_1, t_2)\in L$，有

$$\left.\begin{aligned}\Phi^{++}(t_1,t_2)&=\frac{1}{4}[\phi+S_1\phi+S_2\phi+S_3\phi](t_1,t_2),\\\Phi^{+-}(t_1,t_2)&=\frac{1}{4}[-\phi-S_1\phi+S_2\phi+S_3\phi](t_1,t_2),\\\Phi^{-+}(t_1,t_2)&=\frac{1}{4}[-\phi+S_1\phi-S_2\phi+S_3\phi](t_1,t_2),\\\Phi^{--}(t_1,t_2)&=\frac{1}{4}[\phi-S_1\phi-S_2\phi+S_3\phi](t_1,t_2).\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

1 广义解析函数的积分表达式和奇异积分算子

设 F_1，$F_2\in\mathbb{C}^1(D)$，$D=D_1\times D_2$，并定义方程组

$$\begin{cases}W_{\bar{z}_1}=F_1(z_1,z_2),\\W_{\bar{z}_2}=F_2(z_1,z_2).\end{cases}\tag{4}$$

的解 $W(z_1, z_2)$为多复变广义解析函数. 设 F_1，

2001-09-03 收稿，2001-12-03 收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号：19771068)、河北省自然科学基金(批准号：198155)和河北省教委资助项目

** 联系人，E-mail：qys@inhe.net.cn

$F_2\in\mathbb{C}^1(D)$，则方程(4)可解的必要条件是

$$F_{1\bar{z}_2}=F_{2\bar{z}_1},\tag{5}$$

且称条件(5)为(4)的相容条件．因为 $F_{2\bar{z}_1}=(W_{\bar{z}_2})_{\bar{z}_1}=(W_{\bar{z}_1})_{\bar{z}_2}=F_{1\bar{z}_2}$．

引入奇异积分算子[3]

$$T_1F(z_1,z_2)=\frac{-1}{\prod}\iint_{D_1^+}\frac{F(\tau_1,z_2)\mathrm{d}\sigma_{\tau_1}}{\tau_1-z_1}+\frac{-1}{\prod}\iint_{D_1^+}\frac{F\left(\frac{1}{\tau_1},z_2\right)\mathrm{d}\sigma_{\tau_1}}{\left(\frac{1}{\tau_1}-z_1\right)|\tau_1|^4},$$

$$T_2F(z_1,z_2)=\frac{-1}{\prod}\iint_{D_2^+}\frac{F(z_1,\tau_2)\mathrm{d}\sigma_{\tau_2}}{\tau_2-z_2}+\frac{-1}{\prod}\iint_{D_2^+}\frac{F\left(z_1,\frac{1}{\tau_2}\right)\mathrm{d}\sigma_{\tau_2}}{\left(\frac{1}{\tau_2}-z_2\right)|\tau_2|^4}.$$

其中 D_1^+ 为 $|\tau_1|\leqslant L$，$\tau_1=\xi_1+\mathrm{i}\eta_1$，$\mathrm{d}\sigma_{\tau_1}=\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta_1$，$D_2^+$ 为 $|\tau_2|\leqslant L$，$\tau_2=\xi_2+\mathrm{i}\eta_2$，$\mathrm{d}\sigma_{\tau_2}=\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\eta_2$．

定义多复变函数 $g(z_1,z_2)$ 在复平面 C 上关于 z_1 的广义微商：若给定 $z_2\in\mathbb{C}$，对任意 $\phi(z_1,z_2)\in D_\infty^0(C)$ 均有 $\iint_C F(z_1,z_2)\phi(z_1,z_2)\mathrm{d}\sigma_{z_1}+\iint_C g(z_1,z_2)\frac{\partial\phi(z_1,z_2)}{\partial\bar{z}_1}\mathrm{d}\sigma_{z_1}=0$，则称 $F(z_1,z_2)$ 为函数 $g(z_1,z_2)$ 在复平面 C 上关于 z_1 的广义微商，记为 $g(z_1,z_2)_{\bar{z}_1}=F(z_1,z_2)$．若对于固定的 z_2，有 $\phi(z_1,z_2)$ 的支集：$G=\{(z_1,z_2)\setminus\phi(z_1,z_2)\neq0,\ z_1\in\mathbb{C}\}$ 为 C 中有界集合，$\phi(z_1,z_2)$ 又为无穷可微函数，则称 $\phi(z_1,z_2)\in D_\infty^0(C)$(关于 z_1)．同样，给定 $z_1\in\mathbb{C}$，也有类似定义．

引理3(Hadamard)[3] 令 G 为复平面中的有界域，z，z' 为复平面中任意两点，$z\neq z'$．α，β 满足 $0<\alpha$，$\beta<2$，$\alpha+\beta>2$，则有

$$\iint_G|\tau-z|^{-\alpha}|\tau-z'|^{-\beta}\mathrm{d}\sigma_\tau\leqslant M_1(\alpha,\beta)|z-z'|^{2-\alpha-\beta}.$$

M_1 为仅与 α，β 有关的正常数．

引理4[3] 设对每个固定的 $z_2\in\mathbb{C}$(全复平面)，关于 z_1 有 $F(z_1,z_2)\in L_{p,2}(C)$，其范数 $\|F\|_{p,2}=\|F,D_1^+\|_p+\left\|z_1^{-2}F\left(\frac{1}{z_1},z_2\right),D_1^+\right\|_p$ 与 z_2 无关，$p>2$，D_1^+ 为单位圆盘，则对于每个固定的 $z_2\in\mathbb{C}$，有

(1) $|T_1F|\leqslant M_2(p)\|F\|_{p,2}$，$z_1\in\mathbb{C}$；

(2) 对任意 z_1，$z'_1\in\mathbb{C}$，有 $|T_1F(z_1,z_2)-T_1F(z'_1,z_2)|\leqslant M_2(p)\|F\|_{p,2}|z_1-z'_1|^\alpha$，$\alpha=\frac{p-2}{p}$；

(3) 对于 $|z_1|\geqslant3$，有 $|T_1F|\leqslant M_2(p)\|F\|_{p,2}|z_1|^{\left(\frac{2}{p}-1\right)}$；

(4) $(T_1F)_{\bar{z}_1}=F$，$z_1\in\mathbb{C}$．

证明(1)～(3)可由文献[3]直接得证(略)．

(4) 对任意的 $\phi(\xi,z_2)\in D_\infty^0(C)$，($z_2$ 固定)，有

$$\iint_C F(\xi,z_2)\phi(\xi,z_2)\mathrm{d}\sigma_\xi+\iint_C T_1F\frac{\partial\phi(\xi,z_2)}{\partial\bar{\xi}}\mathrm{d}\sigma_\xi=$$
$$\iint_C F(\xi,z_2)\phi(\xi,z_2)\mathrm{d}\sigma_\xi+$$
$$\iint_{D_1^+}\frac{-1}{\prod}F(\tau_1,z_2)\iint_C\frac{\frac{\partial\phi(\xi,z_2)}{\partial\bar{\xi}}}{\tau_1-\xi}\mathrm{d}\sigma_\xi\mathrm{d}\sigma_{\tau_1}+$$
$$\iint_{D_1^+}\frac{-1}{\prod}\frac{F\left(\frac{1}{\tau_1},z_2\right)}{|\tau_1|^4}\iint_C\frac{\frac{\partial\phi(\xi,z_2)}{\partial\bar{\xi}}}{\frac{1}{\tau_1}-\xi}\mathrm{d}\sigma_\xi\mathrm{d}\sigma_{\tau_1}=$$
$$\iint_C F(\xi,z_2)\phi(\xi,z_2)\mathrm{d}\sigma_\xi-$$
$$\iint_{D_1^+}^{C}F(\tau_1,z_2)\phi(\tau_1,z_2)\mathrm{d}\sigma_{\tau_1}-$$
$$\iint_{D_1^-}^{C}F(\tau'_1,z_2)\phi(\tau'_1,z_2)\mathrm{d}\sigma_{\tau_1}=$$
$$\iint_C F(\xi,z_2)\phi(\xi,z_2)\mathrm{d}\sigma_\xi-$$
$$\iint_C F(\xi,z_2)\phi(\xi,z_2)\mathrm{d}\sigma_\xi=0.$$

所以 $(T_1F)_{\bar{z}_1}=F$．

引理5[3] 设对每个固定的 $z_1\in\mathbb{C}$，关于 z_2 有 $F(z_1,z_2)\in L_{p,2}(C)$．并且其范数 $\|F\|_{p,2}=\|F,D_2^+\|_p+\left\|z_2^{-2}F\left(z_1,\frac{1}{z_2}\right),D_2^+\right\|_p$ 与 z_1 无关，$p>2$，则对每个固定 $z_1\in\mathbb{C}$，有

(1) $|T_2F| \leqslant M_2(p)\|F\|_{p,2}$, $z_2 \in \mathbb{C}$;

(2) 对任意 z_2, $z'_2 \in \mathbb{C}$, 有 $|T_2F(z_1, z_2) - T_2F(z_1, z'_2) \leqslant M_2(p)\|F\|_{p,2}\|z_2 - z'_2\|^{\alpha}$, $\alpha = \frac{p-2}{p}$;

(3) 对于 $|z_2| \geqslant 3$, 有 $|T_2F| \leqslant M_2(p)\|F\|_{p,2}\|z_2\|^{\left(\frac{2}{p}-1\right)}$;

(4) $(T_2F)_{\bar{z}_2} = F$, $z_2 \in \mathbb{C}$.

推论 1 在引理4, 5的条件下,

(1) 对于每个固定的 $z_2 \in \mathbb{C}$, 及 $\alpha = \frac{p-2}{p}$, 则关于 z_1, 有 $T_1F \in \mathbb{C}_\alpha(C)$, 且 $T_1F(\infty, z_2) = 0$;

(2) 对于每个固定的 $z_1 \in \mathbb{C}$, 及 $\alpha = \frac{p-2}{p}$, 关于 z_2, 有 $T_2F \in \mathbb{C}_\alpha(C)$, 且 $T_2F(z_1, \infty) = 0$.

定理 2 设 $F(z_1, z_2)$对每个固定 $z_1 \in C$, 关于 z_2, 当 $|z_1| \leqslant 1$ 时, $F(z_1, z_2) \in \mathbb{C}_\alpha(C)$, 且 $|F(z_1, z_2)| \leqslant M_3$, M_3 和其 Hölder 常数与 z_1 无关. 当 $z_1 \geqslant 1$ 时, $z_1^2F(z_1, z_2) \in \mathbb{C}_\alpha(C)$, 且 $|z_1^2F(z_1, z_2)| \leqslant M_4$. 其 Hölder 常数及 M_4 与 z_1 无关. $0 < \alpha < 1$, 那么对每个固定的 $z_1 \in C$, 关于 z_2 有 $T_1F \in \mathbb{C}_\alpha(C)$, 且其 Hölder 常数与 z_1 无关.

定理 3 设 $F(z_1, z_2)$对每个固定 $z_2 \in \mathbb{C}$, 关于 z_1, 当 $|z_2| \leqslant 1$ 时, $F(z_1, z_2) \in \mathbb{C}_\alpha(C)$, 且 $|F(z_1, z_2)| \leqslant M_5$, M_5 和其 Hölder 常数与 z_2 无关. 当 $z_2 \geqslant 1$ 时, $z_2^2F(z_1, z_2) \in \mathbb{C}_\alpha(C)$, 且 $|z_2^2F(z_1, z_2)| \leqslant M_6$. 其 Hölder 常数及 M_6 与 z_2 无关. $0 < \alpha < 1$. 那么对每个固定的 $z_2 \in C$, 有 $T_2F \in C_\alpha(C)$, 且其 Hölder 常数与 z_2 无关.

定理 4 设 $F(z_1, z_2)$满足定理2, 定理3中 F 的条件, 则有 $T_iF(z_1, z_2) \in \mathbb{C}_\alpha(C^2)$, $i = 1, 2$.

定理 5 设(4)式中 F_1, $F_2 \in \mathbb{C}^1(D_1^+ \times D_2^+)$, 并且适合相容条件(5)以及定理4中 F 所满足的条件, $(T_1F_1)_{\bar{z}_2}$ 也满足定理4中 F 的条件. D_1^+, D_2^+ 为 C 中单位圆盘, 则在 $D_1^\pm \times D_2^+$, $D_1^\pm \times D_2^-$ 中的广义解析函数 $W(z_1, z_2)$, 有如下积分表达式

$$W(z_1, z_2) = T_1F_1 + T_2F_2 - T_2[(T_1F_1)_{\bar{z}_2}] + \Phi(z_1, z_2), \tag{6}$$

$\Phi(z_1, z_2)$是 $D_1^\pm \times D_2^+$, $D_1^\pm \times D_2^-$ 中的解析函数.

证明 令 $\Phi(z_1, z_2) = W(z_1, z_1) - T_1F_1 - T_2F_2 + T_2[(T_1F_1)_{\bar{z}_2}]$, 则

$$\begin{aligned} &\Phi(z_1, z_2)_{\bar{z}_1} = \\ &W(z_1, z_2)_{\bar{z}_1} - (T_1F_1)_{\bar{z}_1} - (T_2F_2)_{\bar{z}_1} + \\ &(T_2[(T_1F_1)_{\bar{z}_2}])_{\bar{z}_1} = \\ &F_1 - F_1 - (T_2F_2)_{\bar{z}_1} + (T_2[T_1(F_{1\bar{z}_2})])_{\bar{z}_1} = 0. \\ &\Phi(z_1, z_2)_{\bar{z}_2} = F_2 - T_1(F_{1\bar{z}_2}) - F_2 + T_1(F_{1\bar{z}_2}) = 0. \end{aligned}$$

因此 $\Phi(z_1, z_2)$是 $D_1^\pm \times D_2^+$, $D_1^\pm \times D_2^-$ 中的解析函数, 即(6)式成立.

引进奇异积分算子 $T_3(F_{1\bar{z}_2}) = T_2[(T_1F_1)_{\bar{z}_2}]$.

定理 6 在定理5的条件下, 又设 $F_{1\bar{z}_1}$满足定理4条件, 则有

(1) $[T_3(F_{1\bar{z}_2})]_{\bar{z}_1} = T_2(F_{1\bar{z}_2})$, $[T_3(F_{1\bar{z}_2})]_{\bar{z}_2} = T_1(F_{1\bar{z}_2})$;

(2) $T_3(F_{1\bar{z}_2}) \in \mathbb{C}_\alpha(C^2)$;

(3) $T_3(F_{1\bar{z}_2})(\infty, z_2) = T_3(F_{1\bar{z}_2})(z_1, \infty) = T_3(F_{1\bar{z}_2})(\infty, \infty) = 0$.

2 广义解析函数的 Plemelj 公式

定理 7 若 $W(z_1, z_2)$为在定理5条件下的广义解析函数, 再设 $F_1(z_1, \infty) = F_2(\infty, z_2) = 0$, $F_{1\bar{z}_2}$满足定理4的条件, 则有广义解析函数的 Plemelj 公式

$$\begin{cases} W^{++}(t_1, t_2) = (T_1F_1)(t_1, t_2) + (T_2F_2)(t_1, t_2) - \\ [T_3(F_{1\bar{z}_2})](t_1, t_2) + \\ \frac{1}{4}[\phi + S_1\phi + S_2\phi + S_3\phi](t_1, t_2), \\ W^{+-}(t_1, t_2) = (T_1F_1)(t_1, t_2) + (T_2F_2)(t_1, t_2) - \\ [T_3(F_{1\bar{z}_2})](t_1, t_2) + \\ \frac{1}{4}[-\phi - S_1\phi + S_2\phi + S_3\phi](t_1, t_2), \\ W^{-+}(t_1, t_2) = (T_1F_1)(t_1, t_2) + (T_2F_2)(t_1, t_2) - \\ [T_3(F_{1\bar{z}_2})](t_1, t_2) + \\ \frac{1}{4}[-\phi + S_1\phi - S_2\phi + S_3\phi](t_1, t_2), \\ W^{--}(t_1, t_2) = (T_1F_1)(t_1, t_2) + (T_2F_2)(t_1, t_2) - \\ [T_3(F_{1\bar{z}_2})](t_1, t_2) + \\ \frac{1}{4}[\phi - S_1\phi - S_2\phi + S_3\phi](t_1, t_2). \end{cases} \tag{7}$$

其中$(t_1, t_2)\in L_1\times L_2$, L_1: $|t_1|=1$, L_2: $|t_2|=1$, 且有 $W(\infty, z_2)=W(z_1, \infty)=W(\infty, \infty)=0$.

3 非线性边值问题 O 的解的存在性及积分表示式

设 D_1^+, D_2^+ 为 C 平面上的单位圆盘, L_1 为 $|t_1|=1$, L_2 为 $|t_2|=1$, $A(t_1, t_2)$, $B(t_1, t_2)$, $C(t_1, t_2)$, $D(t_1, t_2)$为在 $L_1\times L_2$ 上给定函数, 函数 $f(t_1, t_2, W^{++}, W^{+-}, W^{-+}, W^{--})$在 $L_1\times L_2\times C\times C\times C\times C$ 上给定, 我们寻求在 $D_1^{\pm}\times D_2^+$, $D_1^{\pm}\times D_2^-$ 内广义解析, 在 $D_1^{\pm}\times D_2^+ + L_1\times L_2$, $D_1^{\pm}\times D_2^- + L_1\times L_2$ 上连续的函数 $W(z_1, z_2)$, 使得 $W(z_1, \infty)=W(\infty, z_2)=W(\infty, \infty)=0$, 并且适合非线性边值条件:

$$\begin{aligned}&A(t_1,t_2)W^{++}(t_1,t_2)+B(t_1,t_2)W^{-+}(t_1,t_2)+\\&C(t_1,t_2)W^{-+}(t_1,t_2)+D(t_1,t_2)W^{--}(t_1,t_2)=\\&g(t_1,t_2)f(t_1,t_2,W^{++}(t_1,t_2),W^{+-}(t_1,t_2),\\&W^{-+}(t_1,t_2),W^{--}(t_1,t_2)).\end{aligned}\tag{8}$$

称以上问题为**问题 O.**

可将问题 O 化为求奇异积分方程的解的问题. 将(7)式代入(8)式, 有

$$Q\phi=\phi,\tag{9}$$

$$\begin{aligned}Q\phi=&(A+B)(\phi+S_1\phi+S_2\phi+S_3\phi)+\\&(C+D)(-\phi+S_1\phi-S_2\phi+S_3\phi)+\\&(B+D)(2\phi-2S_1\phi)+(1-4B)\phi+\\&4(A+B+C+D)[T_1F_1-T_2F_2-T_3(F_{\bar z_2})]-\\&4gf.\end{aligned}$$

(ϕ 为$L_1\times L_2$ 上的 Hölder 连续函数). 若奇异积分方程(9)式有解 ϕ, 则问题 O 有解 $W(z_1, z_2)=T_1F_1+T_2F_2-T_3(F_{1\bar z_2})+\Phi(z_1, z_2)$.

引理 6[2] 设 $\phi(t_1, t_2)\in\mathbb{H}(L, \alpha)$, $(L=L_1\times L_2)$, 则存在与 ϕ 无关的正常数J_3, 使得

$$\begin{aligned}&\|2\phi-2S_i\phi\|_\alpha\leqslant J_3\|\phi\|_\alpha,\quad\|2S_i\phi\|_\alpha\leqslant J_3\|\phi\|_\alpha,\\&(i=1,2),\ \|S_2\phi\pm S_3\phi\|_\alpha\leqslant J_3\|\phi\|_\alpha,\\&\|-\phi-S_1\phi+S_2\phi+S_3\phi\|_\alpha\leqslant J_3\|\phi\|_\alpha,\\&\|\phi+S_1\phi+S_2\phi+S_3\phi\|_\alpha\leqslant J_3\|\phi\|_\alpha,\\&\|-\phi+S_1\phi-S_2\phi+S_3\phi\|_\alpha\leqslant J_3\|\phi\|_\alpha,\\&\|\phi-S_1\phi-S_2\phi+S_3\phi\|_\alpha\leqslant J_3\|\phi\|_\alpha.\end{aligned}$$

定理 8 设 D_1^+, D_2^+ 为 C 中的单位圆盘, 对于每个固定的 $z_1\in\mathbb{C}$, 关于 z_2 有

$$\begin{cases}T_1(F_{1\bar z_2})\in\mathbb{C}_\alpha(C), & (|z_1|\leqslant 1),\\ z_1^2T_1(F_{1\bar z_2})\in\mathbb{C}_\alpha(C), & (|z_1|\geqslant 1),\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_i(z_1,z_2)\in\mathbb{C}_\alpha(C), & (|z_1|\leqslant 1),\\ z_1^2F_i(z_1,z_2)\in\mathbb{C}_\alpha(C), & (|z_1|\geqslant 1),\end{cases}(i=1,2)$$

其 Hölder 常数和上界均与 z_1 无关; 又对于每个固定的 $z_2\in\mathbb{C}$, 关于 z_1 有

$$\begin{cases}T_1(F_{1\bar z_2})\in\mathbb{C}_\alpha(C), & (|z_2|\leqslant 1),\\ z_2^2T_1(F_{1\bar z_2})\in\mathbb{C}_\alpha(C), & (|z_2|\geqslant 1),\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_i(z_1,z_2)\in\mathbb{C}_\alpha(C), & (|z_2|\leqslant 1),\\ z_2^2F_i(z_1,z_2)\in\mathbb{C}_\alpha(C), & (|z_2|\geqslant 1).\end{cases}(i=1,2),$$

其 Hölder 常数和上界均与 z_2 无关, $0<\alpha<1$. F_1, F_2 适合相容条件 $F_{1\bar z_2}=F_{2\bar z_1}$; 又 $F_1(z_1, \infty)=0$, $F_2(\infty, z_2)=0$, $F_{1\bar z_2}$满足定理 4 条件, $A(t_1, t_2)$, $B(t_1, t_2)$, $C(t_1, t_2)$, $D(t_1, t_2)$, $g(t_1, t_2)\in\mathbb{H}(L, \alpha)$且

$$\begin{aligned}&|f(t'_1,t'_2,W_1^{(1)},W_1^{(2)},W_1^{(3)},W_1^{(4)})-\\&f(t_1,t_2,W_2^{(1)},W_2^{(2)},W_2^{(3)},W_2^{(4)})|\leqslant\\&J_4|(t_1,t_2)-(t'_1,t'_2)|^\alpha+J_5|W_1^{(1)}-W_2^{(1)}|+\\&\cdots+J_8|W_1^{(4)}-W_2^{(4)}|,\end{aligned}\tag{10}$$

其中 J_4, $\cdots$, J_8 是与 t_1, t_2, t'_1, $t'_2W_i^{(1)}$, $W_{2i}^{(2)}$, $W_i^{(3)}$, $W_i^{(4)}$, $(i=1, 2)$无关的正常数, 又设$f(0, 0, 0, 0, 0, 0)=0$; A, B, C, D 适合 $0<\gamma=J_1[J_3(\|A+B\|_\alpha+\|C+D\|_\alpha+\|B+D\|_\alpha)+\|1-4B\|_\alpha]\leqslant 1$, 且在 L 上$\|g\|_\alpha\leqslant\delta$, $\|T_1F_1+T_2F_2-T_3(F_{1\bar z_2})\|_\alpha<\delta$, 则当 $0<\delta<\dfrac{M(1-\gamma)}{4\left[\dfrac{1}{J_3}+J_1(J_{13}+J_{14}M)\right]}$时, 问题 O 可解, 其中 δ 为正常数, 且解的积分表示式由(1)和(6)式给出, 此处 M 是给定的正常数(使$\|\phi\|_\alpha<M$), J_{13}, J_{14} 是适合$\|f\|_\alpha\leqslant J_{13}+J_{14}\|\phi\|_\alpha$ 的正常数(参见以下证明).

证明 记连续函数空间 $C(L_1\times L_2)$的子集合: $T=\{\phi/\phi\in\mathbb{H}(L_1\times L_2, \alpha), \|\phi\|_\alpha\leqslant M\}$.

(1) 证明 Q 是映射集合 T 到自身的映射. 由(2), (9)式有,

$$\|Q\phi\|_\alpha \leqslant J_2\|A+B\|_\alpha\|\phi+S_1\phi+S_2\phi+S_3\phi\|_\alpha+J_2\|C+D\|_\alpha\|-\phi+S_1\phi-S_2\phi+S_3\phi\|_\alpha+J_2\|B+D\|_\alpha\|2\phi-2S_1\phi\|_\alpha+4\|g\|_\alpha\|f\|_\alpha J_2+J_2\|1-4B\|_\alpha\|\phi\|_\alpha+4\|A+B+C+D\|_\alpha J_2\|T_1F_1+T_2F_2-T_3(F_{1\bar{z}_2})\|_\alpha. \tag{11}$$

由(7), (10)式和引理7, 有

$$C(f,L_1\times L_2)\leqslant \max_{(t_1,t_2)\in L_1\times L_2} J_4|(t_1,t_2)|^\alpha+\max_{(t_1,t_2)\in L_1\times L_2} J_5|T_1F_1+T_2F_2-T_3(F_{1\bar{z}_2})|+\max_{(t_1,t_2)\in L_1\times L_2} J_5\left|\frac{1}{4}[\phi+S_1\phi+S_2\phi+S_3\phi]\right|+\cdots+\cdots+\max_{(t_1,t_2)\in L_1\times L_2} J_8|T_1F_1+T_2F_2-T_3(F_{1\bar{z}_2})|+\max_{(t_1,t_2)\in L_1\times L_2} J_8\left|\frac{1}{4}[\phi-S_1\phi-S_2\phi+S_3\phi]\right|.$$

记 $J_9=\max_{(t_1,t_2)\in L_1\times L_2} J_4|(t_1,\ t_2)|^\alpha+\max_{(t_1,t_2)\in L_1\times L_2} J_5|T_1F_1+T_2F_2-T_3(F_{1\bar{z}_2})|+\cdots+\cdots+\max_{(t_1,t_2)\in L_1\times L_2} J_8|T_1F_1+T_2F_2-T_3(F_{1\bar{z}_2})|$. 上式 $\leqslant J_9+J_5J_3\|\phi\|_\alpha+J_6J_3\|\phi\|_\alpha+\cdots+J_8J_3\|\phi\|_\alpha$. 记 $J_{10}=J_5J_3+J_6J_3+\cdots+J_8J_3$, 有上式 $\leqslant J_9+J_{10}\|\phi\|_\alpha$, 即为 $2C(f,\ L_1\times L_2)\leqslant J_9+J_{10}\|\phi\|_\alpha$, 又有

$$|f(t'_1,t'_2,W^{++}(t'_1,t'_2),W^{+-}(t'_1,t'_2),W^{-+}(t'_1,t'_2),W^{--}(t'_1,t'_2))-f(t_1,t_2,W^{++}(t_1,t_2),W^{+-}(t_1,t_2),W^{-+}(t_1,t_2),W^{--}(t_1,t_2))|\leqslant J_4|(t_1,t_2)-(t'_1,t'_2)|^\alpha+J_5|W^{++}(t_1,t_2)-W^{++}(t'_1,t'_2)|+\cdots+J_8|W^{--}(t_1,t_2)-W^{--}(t'_1,t'_2)|,$$

$T_1(F_{1\bar{z}_2})$, F_1, F_2 满足定理4条件, 所以

$|T_1F_1(t_1,t_2)-T_1F_1(t'_1,t'_2)|\leqslant J_{11}|(t_1,t_2)-(t'_1,t'_2)|^\alpha$;
$|T_2F_2(t_1,t_2)-T_2F_2(t'_1,t'_2)|\leqslant J_{11}|(t_1,t_2)-(t'_1,t'_2)|^\alpha$;
$|T_3F_{1\bar{z}_2}(t_1,t_2)-T_3F_{1\bar{z}_2}(t'_1,t'_2)|\leqslant J_{11}|(t_1,t_2)-(t'_1,t'_2)|^\alpha$.

其中 J_{11} 为正常数. 所以

$$|W^{++}(t_1,t_2)-W^{++}(t'_1,t'_2)|\leqslant 3J_{11}|(t_1,t_2)-(t'_1,t'_2)|^\alpha|+\left|\frac{1}{4}[\phi+S_1\phi+S_2\phi+S_3\phi]-\frac{1}{4}[\phi+S_1\phi+S_2\phi+S_3\phi](t'_1,t'_2)\right|\leqslant (3J_{11}+J_3\|\phi\|_\alpha)|(t_1,t_2)-(t'_1,t'_2)|^\alpha,$$

同理可证得

$$|W^{+-}(t_1,t_2)-W^{+-}(t'_1,t'_2)|\leqslant (3J_{11}+J_3\|\phi\|_\alpha)|(t_1,t_2)-(t'_1,t'_2)|^\alpha,$$
$$|W^{-+}(t_1,t_2)-W^{-+}(t'_1,t'_2)|\leqslant (3J_{11}+J_3\|\phi\|_\alpha)|(t_1,t_2)-(t'_1,t'_2)|^\alpha,$$
$$|W^{--}(t_1,t_2)-W^{--}(t_1',t_2')|\leqslant (3J_{11}+J_3\|\phi\|_\alpha)|(t_1,t_2)-(t'_1,t'_2)|^\alpha.$$

记 $J_{12}=J_4+3J_5J_{11}+3J_6J_{11}+3J_7J_{11}+3J_8J_{11}$; $J_{13}=J_5J_3+J_6J_3+J_7J_3+J_8J_3$, 所以上式即为

$$|f(t'_1,t'_2,W^{++}(t'_1,t'_2),W^{+-}(t'_1,t'_2),W^{-+}(t'_1,t'_2),W^{--}(t'_1,t'_2))-f(t_1,t_2,W^{++}(t_1,t_2),W^{+-}(t_1,t_2),W^{-+}(t_1,t_2),W^{--}(t_1,t_2))|\leqslant$$

$(J_{12}+J_{13}\|\phi\|_\alpha)|(t_1,\ t_2)-(t_1,\ t_2)|^\alpha$. 综上所述, 可得 $\|f\|_\alpha=C(f,\ L_1\times L_2)+H(f,\ \alpha,\ L_1\times L_2)=J_9+J_{10}\|\phi\|_\alpha+J_{12}+J_{13}\|\phi\|_\alpha=J_{14}+J_{15}\|\phi\|_\alpha$, 其中 $J_9+J_{12}=J_{14}$, $J_{10}+J_{13}=J_{15}$. 所以 $\|Q\phi\|_\alpha\leqslant J_1\|A+B\|_\alpha J_3\|\phi\|_\alpha+J_1\|C+D\|_\alpha J_3\|\phi\|_\alpha+J_1\|B+D\|_\alpha J_3\|\phi\|_\alpha+J_1\|1-4B\|_\alpha\|\phi\|_\alpha+4\frac{1}{J_1J_3}J_2\delta+4\delta J_1(J_{14}+J_{15}\|\phi\|_\alpha)<\gamma M+\delta 4\left[\frac{1}{J_3}+J_1(J_{14}+J_{15}M)\right]$.

又因为 $0<\delta<\dfrac{M(1-\gamma)}{4\left[\frac{1}{J_3}+J_1(J_{14}+J_{15}M)\right]}$, 所以 $\|Q\phi\|_\alpha<M$. 所以 Q 是映射集合 T 到自身的映射.

(2) 下证 Q 是连续映射.

任取 $\phi_n\in T$, 并设 ϕ_n 一致收敛于 $\phi(t_1,\ t_2)$,

$(t_1, t_2) \in L_1 \times L_2$，即对于任意 $\epsilon > 0$，当 n 充分大有时，$\| \phi_n - \phi \|_\alpha < \epsilon$，则又由文献[3]可得，当 n 充分大时，对任意的 $(t_1, t_2) \in L_1 \times L_2$ 有

$$|S_1\phi_n - S_1\phi| < G_1\epsilon,\ |S_2\phi_n - S_2\phi| < G_2\epsilon \tag{12}$$

G_1，G_2 为正常数. 记 $\Psi_n(\tau_1, \tau_2) = \phi_n(\tau_1, \tau_2) - \phi_n(t_1, \tau_2) - \phi_n(\tau_1, t_2) + \phi_n(t_1, t_2)$. $\Psi(\tau_1, \tau_2) = \phi(\tau_1, \tau_2) - \phi(t_1, \tau_2) - \phi(\tau_1, t_2) + \phi(t_1, t_2)$. 则有

$$|\Psi_n(\tau_1,\tau_2)| \leqslant 2\|\phi_n\|_\alpha |\tau_1 - t_1|^{\frac{\alpha}{2}} |\tau_2 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}};$$

$$|\Psi(\tau_1,\tau_2)| \leqslant 2\|\phi\|_\alpha |\tau_1 - t_1|^{\frac{\alpha}{2}} |\tau_2 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{13}$$

记 $S_3\phi_n(t) - S_3\phi(t) = I_1(L) + \cdots + I_5(L)$，$t = (t_1, t_2)$，$L = L_1 \times L_2$，其中

$$I_1(L) = \frac{1}{(\prod i)^2}\int_L \frac{\Psi_n(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2;$$

$$I_2(L) = \frac{-1}{(\prod i)^2}\int_L \frac{\Psi(t_1,t_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2;$$

$$I_3(L) = \frac{1}{(\prod i)^2}\int_L \frac{\phi_n(t_1,\tau_2) - \phi(t_1,\tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2;$$

$$I_4(L) = \frac{1}{(\prod i)^2}\int_L \frac{\phi_n(\tau_1,t_2) - \phi(\tau_1,t_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2;$$

$$I_5(L) = \frac{1}{(\prod i)^2}\int_L \frac{\phi(t_1,t_2) - \phi_n(t_1,t_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2.$$

以 t 为中心作 t 的 3δ 邻域，记 $L_i = L_{i1} + L_{i2}$，$i = 1, 2$，L_{i1} 为在 $O(t, 3\delta)$ 内部的部分，L_{12} 为在 $O(t, 3\delta)$ 外部的部分，则有

$$\begin{aligned} I_1(L) &= \frac{1}{(\prod i)^2}\int_L \frac{\Psi_n(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 = \\ &I_1(L_{11} \times L_{21}) + I_1(L_{11} \times L_{22}) + \\ &I_1(L_{12} \times L_{21}) + I_1(L_{12} \times L_{22}). \end{aligned}$$

记 $|\tau_1 - t_1| = \rho_1$，$|\tau_2 - t_2| = \rho_2$，则 $|d\tau_1| = d\rho_1$，$|d\tau_2| = d\rho_2$，所以

$$|I_1(L_{11} \times L_{21})| \leqslant \frac{1}{\prod^2}\int_{L_{11}\times L_{21}} 2\|\phi_n\|_\alpha |\tau_1 - t_1|^{\frac{\alpha}{2}} |\tau_2 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}} |\tau_1 - t_1|^{-1} |\tau_2 - t_2|^{-1} |d\tau_1| |d\tau_2| \leqslant$$

$$\frac{1}{\prod^2}\int_0^{3\delta} 2\|\phi_n\|_\alpha \rho_1^{\frac{\alpha}{2}-1} d\rho_1 \int_0^{3\delta} \rho_2^{\frac{\alpha}{2}} d\rho_2 =$$

$$\frac{1}{\prod^2} 2\|\phi_n\|_\alpha (3\delta)^{\frac{\alpha}{2}} (3\delta)^{\frac{\alpha}{2}} = M_7 \delta^\alpha.$$

其中 $M_7 = 3^\alpha \frac{1}{\prod^2} 2\|\phi_n\|_\alpha$. 又 $|I_1(L_{11} \times L_{22})| \leqslant$

$$\frac{1}{(\prod i)^2}\int_{L_{11}\times L_{22}} \frac{|\Psi_n(\tau_1,\tau_2)|}{|\tau_1 - t_1||\tau_2 - t_2|} |d\tau_1 \| d\tau_2| \leqslant$$

$$\frac{1}{\prod^2}\int_0^{3\delta} 2\|\phi_n\|_\alpha \rho_1^{\frac{\alpha}{2}-1} d\rho_1 \int_{3\delta}^{A_2} \rho_2^{\frac{\alpha}{2}-1} d\rho_2 \leqslant$$

$$\frac{1}{\prod^2} 2\|\phi_n\|_\alpha (3\delta)^{\frac{\alpha}{2}} A_2^{\frac{\alpha}{2}} = M_8 \delta^{\frac{\alpha}{2}}.$$

A_2 为 D_2 的直径，$M_8 = \frac{1}{\prod^2} 2\|\phi_n\|_\alpha 3^{\frac{\alpha}{2}} A_2^{\frac{\alpha}{2}}$，同理可得 $|I_1(L_{12} \times L_{21})| < M_9 \delta^{\frac{\alpha}{2}}$. 类似讨论

$|I_2(L_{11} \times L_{22})|$；$|I_2(L_{11} \times L_{21})|$；$|I_2(L_{12} \times L_{21})|$ 有

$|I_2(L_{11} \times L_{22})| < M_{10}\delta^\alpha$；$|I_2(L_{11} \times L_{21})| < M_{11}\delta^{\frac{\alpha}{2}}$

$|I_2(L_{12} \times L_{21})| < M_{12}\delta^{\frac{\alpha}{2}}$. 令
$E(\tau_1, \tau_2) = [\phi_n(\tau_1, \tau_2) - \phi(\tau_1, \tau_2)] - [\phi_n(t_1, \tau_2) - \phi(t_1, \tau_2)] + [\phi_n(t_1, t_2) - \phi(t_1, t_2)] - [\phi_n(\tau_1, t_2) - \phi(\tau_1, t_2)]$，类似于(13)式的证明，有

$|E(\tau_1, \tau_2)| \leqslant 2\|\phi_n - \phi\|_\alpha |\tau_1 - t_1|^\alpha$；

$|E(\tau_1, \tau_2)| \leqslant 2\|\phi_n - \phi\|_\alpha |\tau_2 - t_2|^\alpha$；

$|E(\tau_1, \tau_2)| \leqslant 2\|\phi_n - \phi\|_\alpha |\tau_1 - t_1|^{\frac{\alpha}{2}} |\tau_2 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}}$.

可得

$$|I_1(L_{12} \times L_{22}) + I_2(L_{12} \times L_{22})| \leqslant$$

$$\frac{2}{\prod^2}\|\phi_n - \phi\|_\alpha \int_{3\delta}^{A_1} \rho_1^{\frac{\alpha}{2}-1} d\rho_1 \int_{3\delta}^{A_2} \rho_2^{\frac{\alpha}{2}-1} d\rho_2 \leqslant$$

$$\frac{2}{\prod^2} A_1^{\frac{\alpha}{2}} A_2^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi_n - \phi\|_\alpha = M_{13}\|\phi_n - \phi\|_\alpha.$$

A_i 为 D_i 的直径，$i = 1, 2$，$M_{13} = \frac{2}{\prod^2} A_1^{\frac{\alpha}{2}} A_2^{\frac{\alpha}{2}}$.

$$|I_3 L| = \left|\frac{1}{\prod i}\int_{L_1} \frac{S_2(\phi_n(t_1,\tau_2) - \phi(t_1,\tau_2))}{(\tau_1 - t_1)} d\tau_1\right| =$$

$$| S_2\phi_n - S_2\phi | \leqslant G_2 \in .$$

同理可得 $| I_4(L) | = | S_1\phi_n - S_1\phi | \leqslant G_1 \in$，并且 $|I_5(L)| = |\phi(t) - \phi_n(t)| \leqslant \| \phi_n - \phi \|_\alpha$.

综上所述，有 $| S_3\phi_n - S_3\phi | \leqslant$

$$\begin{aligned} & | I_1(L) | + | I_2(L) | + | I_3(L) | + \\ & | I_4(L) | + | I_5(L) | \leqslant \\ & (M_7\delta^\alpha + M_8\delta^{\frac{\alpha}{2}} + M_9\delta^{\frac{\alpha}{2}} + M_{10}\delta^{\frac{\alpha}{2}} + M_{11}\delta^{\frac{\alpha}{2}} + \\ & M_{12}\delta^{\frac{\alpha}{2}}) + M_{13} \| \phi_n - \phi \|_\alpha + G_2 \in + G_1 \in + \\ & \| \phi_n - \phi \|_\alpha = \\ & M_{14}(\delta^\alpha + \delta^{\frac{\alpha}{2}} + \| \phi_n - \phi \|_\alpha + \in), \end{aligned}$$

其中 $M_{14} = \max(M_7 + M_8 + M_9 + M_{10} + M_{11} + M_{12}, M_{13} + 1, G_2 + G_1)$. 又因为当 n 充分大时，有 $\| \phi_n - \phi \|_\alpha < \in$，所以对于任意的 $\in > 0$，可取 δ 充分小，再取 n 充分大，可以使得对于任意的 $t \in L$，有

$$\begin{aligned} & | S_3\phi_n - S_3\phi | < M_{14}(\delta^\alpha + \delta^{\frac{\alpha}{2}} + \\ & \| \phi_n - \phi \|_\alpha + \in) < G_3 \in . \end{aligned} \tag{14}$$

G_3 为正常数. 则由(9)，(10)，(12)，(14)式可知，总可选取充分大的 n，再取 δ 充分小，使对于任意的 $t \in L$，有

$$\begin{aligned} & | Q\phi_n - Q\phi | \leqslant \| A + B \|_\alpha (\in + G_2 \in + G_1 \in + G_3 \in) + \\ & \| C + D \|_\alpha (\in + G_2 \in + G_1 \in + G_3 \in) + \\ & \| B + D \|_\alpha (2 \in + 2G_1 \in) + \| 1 - 4B \|_\alpha \in + \\ & 4 | 4g | J_5 J_3 \in < G_4 \in . \end{aligned}$$

(G_4 为正常数).

所以 Q 为连续映射，又由 Arzda-Ascoli 定理可知，T 是 $C(L)$ 中的紧集，所以连续映射 Q 映射 $C(L)$ 中的闭凸集 T 到自身，且 $Q(T)$ 也是 $C(L)$ 中的紧集，则可由 Schaude 不动点原理知，至少存在一个函数 $\Phi \in$ 𝕳(L, α) 适合奇异积分方程(10)，即问题 O 至少存在一解 $W(z_1, z_2)$，并且解的积分表达式由(6)和(1)式给出.

注1 在定理8中，若 $f \equiv 1$，那么非线性问题 O 变为线性问题，存在惟一解.

注2 当(4)式中 $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$ 时，(4)式的解 $W(z_1, z_2)$ 是解析函数，则定理 7，8 就是文献[2]中的引理 3 和定理 3.

参 考 文 献

1 钟同德. 多复变函数哥西核型积分的边界性质. 数学学报，1965，15(2)：227

2 黄 沙. 多复变解析函数的一个非线性边值问题. 数学物理学报，1997，17(4)：382

3 闻国椿，等. 广义解析函数及其拓广. 石家庄：河北教育出版社，1987